IIT-JEE 2012 : PAPER-1

Date : 08-04-2012 **Duration : 3 Hours** **Max. Marks : 210**

कृपया इन निर्देशों को ध्यान से पढ़ें। आपको 5 मिनट विशेष रूप से इस काम के लिए दिये गये हैं।

निर्देश :

A. सामान्य

1. यह पुस्तिका आपका प्रश्नपत्र है। इसकी मुहरें (SEALS) तब तक न तोडें जब तक निरीक्षकों के द्वारा इसका निर्देश न दिया जाये।
2. प्रश्नपत्र का कोड (CODE) इस पृष्ठ के ऊपरी दाहिने कोने और इस पुस्तिका के पिछले पृष्ठ (पृष्ठ संख्या 28) पर छपा है।
3. कच्चे काम के लिये खाली पृष्ठ और खाली जगह इस पुस्तिका में ही है। कच्चे काम के लिए कोई अतिरिक्त कागज नहीं दिया जायेगा।
4. कोरे कागज, क्लिप बोर्ड (CLIP BOARD), लॉग तालिका, स्लाइडरूल, कैल्कुलेटर, सेलफोन, पेजर और किसी प्रकार के इलेक्ट्रानिक उपकरण परीक्षा कम में अनुमत नहीं है।
5. प्रश्नों के उत्तर और अपनी व्यक्तिगत जानकारियाँ एक दो–भाग कार्बन रहित कागज, जो अलग से दिया जायेगा, पर भारी जायेंगी। आपको ये भाग अलग नहीं करने हैं। परीक्षा समाप्त होने के बाद निरीक्षक इन्हें अलग करेंगें। ऊपरनी पृष्ठ–मशीन–जाँच ऑब्जक्टिव रेस्पांस शीट (ओर.आर.एम., ORS) है जो निरीक्षक द्वारा वापस ले ली जायेगी। निचला पृष्ठ आप परीक्षा के बाद अपने साथ ले जा सकते हैं।
6. ऊपरी मूल पृष्ठ के बुलबुलों (BUBBLES) को काले बॉल प्वाइंट कलम से काला करें। इतना दबाव डालें कि निचले पृष्ठ पर निशान बन जाये।
7. ओ.आ.एस. (ORS) या इस पुस्तिका में हेर–फेर/विकृति न करें।
8. इस पुस्तिका की मुहरें तोड़ने के पश्चात् कृपया जाँच लें कि इसमें 28 पृष्ठ हैं और सभी 60 प्रश्न और उनके उत्तर विकल्प ठीक से पड़े जा सकते हैं। सभी खंडों की शुरूआत में दिये हुए निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

B. ओर.आर.एस (ORS) के दाहिने भाग का भराव

9. जो.आर.एस के दाहिने और बाएं भाग में भी कोड छपे हुए हैं।
10. जाँच लें कि ओ.आर.एस० और इस पुस्तिका पर एक ही कोड छपा हुआ है। यदि कोड भिन्न हैं तो इस पुस्तिका को बदलने की माँग करें। ओ.आर.एस. में दी हुई निर्धारित जगह में हस्ताक्षर करके यह जाँच करना स्वीकार करें।
11. अपना नाम, पंजीयन संख्या और परीक्षा केन्द्र का नाम जो ओ.आर.एस. के दाहिने भाग में निर्धारित जगह में कलम से भरें और अपने हस्ताक्षर करें। इनमें से काई भी जानकारी कही और न लिखें। पंजीयन संख्या के हर अंक के नीचे अनुरूप बुलबुले (BUBBLE) को इस तरह से काला करें कि निचले पृष्ठ पर भी निशान बन जाए। ओ.आर.एस. के दाहिने भाग (RA) में दिये हुए कोड को भी काला करें।

C. प्रश्नपत्र का प्रारूप

इस प्रश्नपत्र के तीन भाग (भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान और गणित) हैं। हर भाग के तीन खंड हैं।

12. खंड I में 10 बहुविकल्प प्रश्न हैं। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A), (B), (C) और (D) हैं जिनमें से एक ही सही है।
13. खंड II में 5 बहुविकल्पी प्रश्न हैं। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A), (B), (C) और (D) हैं जिनमें से एक या अधिक सही हैं।
14. खंड III में 5 प्रश्न हैं। हर प्रश्न का उत्तर एक अंक का पूर्णांक, 0 से 9 (दोनों सहित) तक, है।

D. अंकन योजना

15. खंड I के हर प्रश्न में केवल सही उत्तर वाले बुलबुले (BUBBLE) को काला करने पर 5 अंक और कोई भी बुलबुला (BUBBLE) काला नहीं करने पर शून्य (0) अंक प्रदान किया जायेगें। अन्य सभी स्थितियों में ऋणात्मक एक (– 1) अंक प्रदान किया जायेगा।
16. खंड II कके हर प्रश्न में केवल सही उत्तरों (उत्तर) वाले **सभी** बुलबुलों (बुलबुले) को काला करने पर 4 अंक प्रदान किए जायेगें। अन्य सभी स्थितियों में शून्य (0) अंक प्रदान किया जायेगा। इस खंड के प्रश्नों में गलत उत्तर देने पर कोई ऋणात्मक अंक नहीं दिये जायेगें।
17. खंड III के हर प्रश्न में केवल सही उत्तर वाले बुलबुले को काला करने पर 4 अंक प्रदान किये जायेगें। अन्य सभी स्थितियों में शून्य (0) अंक प्रदान किया जायेगा। इस खंड के प्रश्नों में गलत उत्तर देने पर **कोई ऋणात्मक अंक नहीं दिये जायेगें।**

अपना नाम और पंजीयन संख्या इस पुस्तिका के पिछले पृष्ठ में दिये गये स्थान में लिखें और अपने हस्ताक्षर करें।

भाग - I : भौतिक विज्ञान

खण्ड - I : एकल सही उत्तर प्रकार

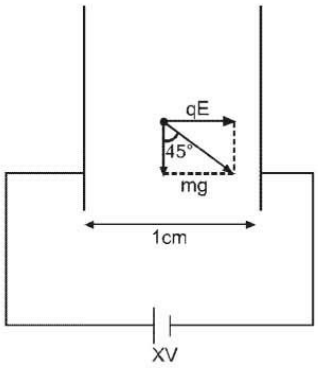
इस खण्ड में **10 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक ही सही** है।

1. दो बड़ी ऊर्ध्वाधर (vertocal) व संमातर धातु प्लेटों के बीच 1cm की दूरी है। वे X विभंवातर के DC स्त्रोत से जुड़ी हैं। दोनों प्लेंटो के मध्य एक प्रोटॉन को स्थिर– अवस्था में छोड़ा जाता है। छोड़े जाने के तुरंत बाद प्रोटॉन ऊर्ध्व से 45° कोण बनाता हुआ गति करता है। तब X का मान लगभग है :

(A) 1×10^{-5} V (B) 1×10^{-7} (C) 1×10^{-9}V (D) 10×10^{-10}V

Ans. **(A)**

Sol.



$mg = qE$

$$1.67 \times 10^{-27} \times 10 = 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{X}{0.01}$$

$$X = \frac{1.67}{1.6} \times 10^{-9} \text{ V}$$

$$X = 1 \times 10^{-9} \text{ V}$$

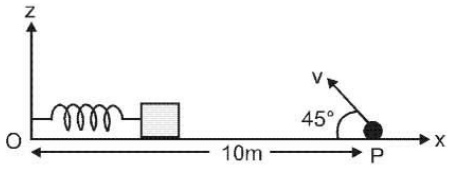
2 . एक बर्तन में दो मोल हीलियम गैस (परमाणु द्रव्यमान = 4 amu) और एक मोल ऑर्गन गैस (परमाणु द्रव्यमान = 40 amu) का मिश्रण 300 K तापमान पर है। इनकी वर्ग माध्य–मूल चाल का अनुपात, v_{rms} (हीलियम)/ v_{rms} (ऑर्गन) है

(A) 0.32 (B) 0.45 (C) 2.24 (D*) 3.16

Ans. **(D)**

Sol. $$\frac{v_{Rms_{He}}}{v_{Rms_{Ar}}} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{m_{He}}}}{\sqrt{\frac{3RT}{m_{Ar}}}} = \sqrt{\frac{m_{Ar}}{m_{He}}} = \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

3. एक द्रव्यमान–रहित स्प्रिंग की तनाव –रहित लम्बाई 4.9cm है। उसका एक सिरा बंधित है और दूसरे पर एक छोटा गुटका लगा है (चित्र देखिये)। यह निकाय एक घर्षण –रहित क्षैतिज (horizontal)सतह पर रखा है। समय t =0 पर गुटके को 0.2m खींच कर स्थिर अवस्था से छोडा जाता तब वह गुटका $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/s आवृत्ति का सरल–आवर्त –दोलन करता है। ठीक उसी समय (t=0) पर छोटा कंकड v चाल से क्षैतिज से 45° कोण पर बिंदु P से प्रक्षेपित किया जाता है। बिंदु P की बिंदु O से दूरी (क्षैतिज) 10m है। यदि t = 1s पर कंकड गुटके पर गिरता है, तब v का मान है (g = 10m/s² लें)



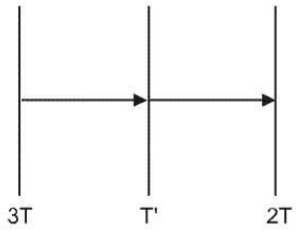
(A*) $\sqrt{50}$m/s (B) $\sqrt{51}$m/s (C) $\sqrt{52}$m/s (D) $\sqrt{53}$m/s

4. तीन बहुत बड़ी प्लेटें, जिनका क्षेत्रफल बराबर है, समांतर व एक दूसरे के पास रखी गयी हैं। उनको आदर्श –कृष्ण –सतह मानें और उनकी ऊष्मा चालकता बहुत अधिक है। पहली और तीसरी प्लेटों को क्रमशः 2T और 3T तापमान पर रखा जाता है। स्थाई अवस्था में बीच की (अर्थात दूसरी) प्लेट का तापमान है।

(A) $\left(\frac{65}{2}\right)^{\frac{1}{4}}T$ (B) $\left(\frac{97}{4}\right)^{\frac{1}{4}}T$ (C) $\left(\frac{97}{2}\right)^{\frac{1}{4}}T$ (D) $(97)^{\frac{1}{4}}T$

Ans. (C)

Sol.



स्थायी अवस्था पर माध्य पट्टिका द्वारा अवशोषित ऊष्मा की दर, उत्सर्जित ऊष्मा की दर के तुल्य है

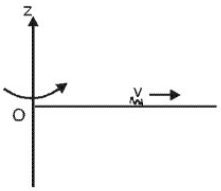
$\sigma A(3T)^4 - \sigma A(T')^4 = \sigma A(T')^4 - \sigma A(2T)^4$

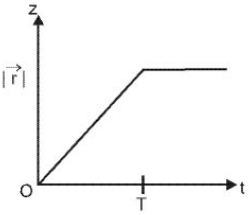
$(3T)^4 - (T')^4 = (T')^4 - (2T)^4$

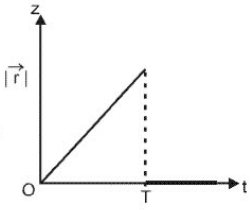
$(2T')^4 = (16 + 81)\,T^4$

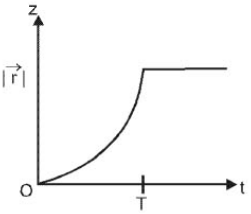
$$T' = \left(\frac{97}{2}\right)^{1/4} T$$

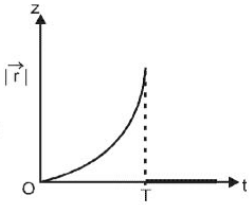
5. एक पतली एकसमान छड़ बिन्दु O पर कीलकित है और क्षैतिज तल में एकसमान कोणीय चाल ω से घूम रही है (चित्र देखिये)। t = 0 पर एक छोटा कीड़ा O से चलना शुरू करके छड़ के अंतिम सिरे t = T समय पर पहुँच कर रूक जाता है। कीड़ा छड़ के सापेक्ष एकसमान चाल v से चलता है। निकाय की कोणीय चाल पूरे समय ω बनी रहती है। O के परितः निकाय पर लगने वाले बल–आघूर्ण का मान ($|\vec{\tau}|$) समय के साथ जिस प्रकार बदलता है उसका सर्वोत्तम वर्णन किस ग्राफ में है?



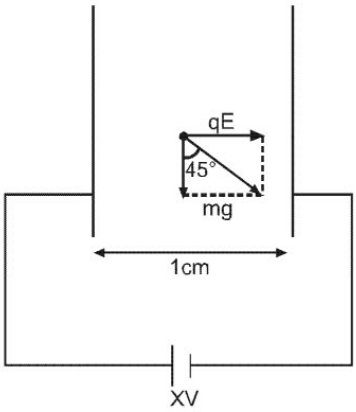
(A)


(B)


(C)


(D)


Ans. (A)

Sol.


$mg = qE$

$1.67 \times 10^{-27} \times 10 = 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{X}{0.01}$

$X = \frac{1.67}{1.6} \times 10^{-9}$ V

$X = 1 \times 10^{-9}$ V

6 Searle's प्रयोग द्वारा यंग प्रत्यास्थता गुणांक, $\left(Y = \frac{4MLg}{\pi l d^2}\right)$ निकालने के लिए एक L = 2m लंबे व d = 0.5mm व्यास के तार का उपयोग किया गया है। भार M =2.5 kg लगाने पर तार की लम्बाई में l = 0.25mm की वृद्धी हुई । d और / को नापने के लिए क्रमशः स्क्रूगेंज और माइक्रोमीटर का प्रयोग किया गया। दोनों के पिच 0.5 mm एवं दोनों के सरकुलर स्केल पर 100 निशान है। Y के निकाले गये मान में अधिकतम प्रसंभाव्य त्रुटि में

(A) d और l की मापों में त्रुटियों का अंशदान बराबर है।

(B) d की माप में त्रुटि का अशंदान l की माप में त्रुटि के अशंदान की तुलना में दुगुना है।

(C) l की माप में त्रुटि का अशंदान d की माप में त्रुटि के अशदान की तुलना में दुगुना है।

(D) d की माप में त्रुटि का अशदान l की माप में त्रुटि में अशंदान की तुलना में चौगुना है।

Ans. (A)

Sol. $\Delta d = \Delta \ell = \frac{0.5}{100}$ mm

$$y = \frac{4MLg}{\pi \ell d^2}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{max} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + 2\frac{\Delta d}{d}$$

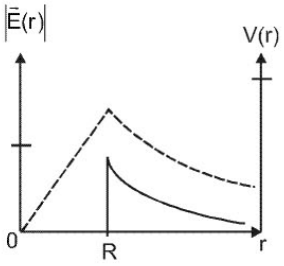
ℓ के मापन में त्रुटि $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{0.5/100\,mm}{0.25\ mm}$

d के मापन में त्रुटि $2\frac{\Delta d}{d} = \frac{2 \times \frac{0.5}{100}}{0.5\ mm} = \frac{0.5/100}{0.25}$

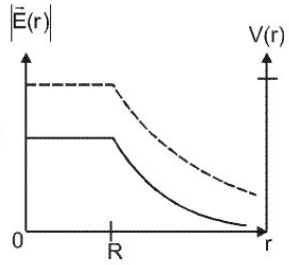
ℓ के मापन के कारण y में त्रुटि = d के मापन के कारण y में त्रुटि

7. एक पतले गोलीय कोश (shell) का केंन्द्र उद्गम पर है व त्रिज्या R है। उस पर धनावेश इस प्रकार वितरीत है कि पृष्ठ–घनत्व एकसमान है। विद्युत क्षेत्र के मान $|\vec{E}(r)|$ और विद्युत –विभव V (r) का , केन्द्र से दूरी r के साथ बदलाव का सर्वोत्तम वर्णन किस ग्राफ में है।

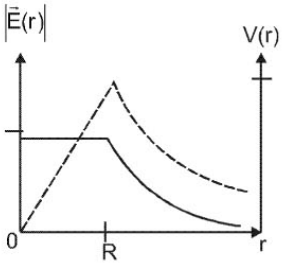
(A)



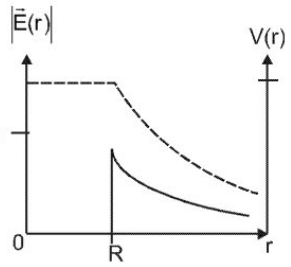
(B)



(C)

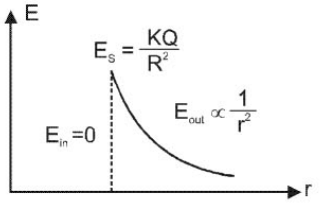


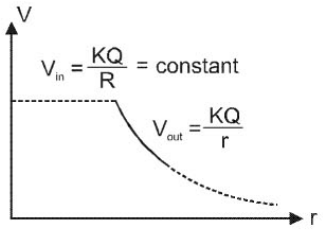
(D)



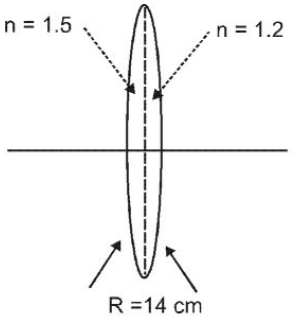
Ans. (D)

Sol.





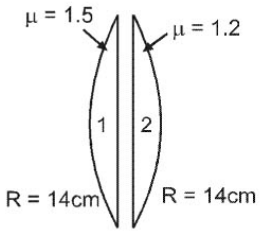
8. चित्र में दर्शाये अनुसार दो पतले समतल–उत्तल लेंसों को मिलाकर एक उभयोत्तल लेंस बना है। पहले लेंस का अपर्तनांक (n) 1.5 और दूसरे का 1.2 है। दोनों लेंसों के गोलीय फलकों की वक्रता –त्रिज्या, R = 14 cm है। इस उभयोत्तल लेंस के लिये यदि बिम्ब दूरी 40 cm हो, तब प्रतिबिम्ब दूरी होगी



(A) –280.0 cm (B) 40.0 cm (C) 21.5 cm (D) 13.3 cm

Ans. **(B)**

Sol. $\frac{1}{f_1} = (\mu - 1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$



$\frac{1}{f_1} = (1.5 - 1)\left[\frac{1}{14} - \frac{1}{\infty}\right]$

$\frac{1}{f_1} = \frac{0.5}{14}$

$\frac{1}{f_1} = (1.2 - 1)\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-14}\right]$

$\frac{1}{f_2} = \frac{0.2}{14}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$= \frac{0.5}{14} + \frac{0.2}{14}$

$\frac{1}{f} = \frac{0.7}{14}$

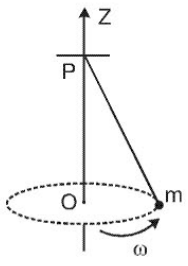
$\frac{1}{v} = \frac{7}{140} - \frac{1}{40}$

$= \frac{1}{20} - \frac{1}{40}$

$\frac{1}{v} = \frac{2-1}{40}$

v = 40 cm

9. एक छोटा पिंड m एक द्रव्यमान–रहित धागे से जुड़ा है। धागे का दूसरा सिरा P पर बंधित हैं (चित्र देखिये।) पिंड x – y तल में एकसमान कोणीय चाल ω से वृत्तीय गति कर रहा है। वृत्त का केन्द्र O पर है। यदि O और P बिन्दूओं के सापेक्ष निकाले गये इस निकाय के कोणीय संवेग क्रमशः $\vec{L}_0$ और $\vec{L}_P$ है, तब



(A) $\vec{L}_O$ और $\vec{L}_P$ समय के साथ नही बदलते है।

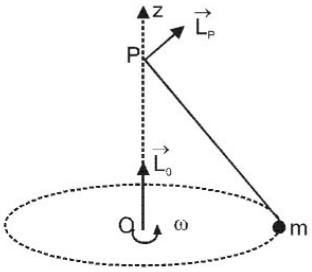
(B) $\vec{L}_O$ समय के साथ बदलता है, जबकि $\vec{L}_P$ एकसमान है।

(C) $\vec{L}_O$ एकसमान रहता है, जबकि $\vec{L}_P$ समय के साथ बदलता है।

(D) $\vec{L}_O$ और $\vec{L}_P$ दोनों समय के साथ बदलते है।

Ans. (C)

Sol.



L_0 की दिशा और परिमाण नियत है

L_P का परिमाण नियत है परन्तु दिशा परिवर्तित है।

10. यंग द्वि–स्लिट प्रयोग को तीन बार क्रमशः हरा, लाल और नीला प्रकाश प्रयुक्त करके किया गया। एक बार में एक ही प्रयोग किया गया। तीन फ्रिंज–चौड़ाई क्रमशः β_C, β_R और β_B पाई गई। तब,

(A) $\beta_G > \beta_B > \beta_R$ (B) $\beta_B > \beta_G > \beta_R$ (C) $\beta_R > \beta_B > \beta_G$ (D) $\beta_R > \beta_G > \beta_B$

Ans. (D)

$$\beta = \frac{\lambda D}{d}$$

$\overrightarrow{\text{VIBGYOR}}$ λ बढ़ेगा

$\lambda_R > \lambda_G > \lambda_B$

So $\beta_R > \beta_G > \beta_B$

खण्ड - II : बहुल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **5 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक या अधिक** सही है।

11. एक लम्बे पाइप के खुले सिरे में एक व्यक्ति फूँक मारता है। इससे वायु में एक तीव्र–दाब का स्पंद पाइप में आगे की ओर चलता है। जब यह स्पंद पाइप के दूसरे सिरे पर पहुँचता है,तब

(A) एक तीव्र–दाब का स्पंद व्यक्ति के मुँह की ओर चलने लगता है, यदि पाइप का दूसरा सिरा खुला है।

(B) एक मंद–दाब का स्पंद व्यक्ति के मुँह की ओर चलने लगता है, यदि पाइप का दूसरा सिरा खुला है।

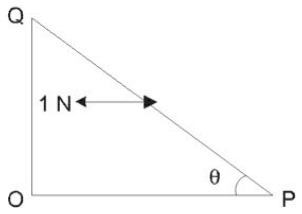
(C) एक मंद–दाब का स्पंद व्यक्ति के मुँह की ओर चलने लगता है, यदि पाइप का दूसरा सिरा बंद है।

(D) एक तीव्र–दाब का स्पंद व्यक्ति के मुँह की ओर चलने लगता है, यदि पाइप का दूसरा सिरा बंद है।

Ans. **(B), (D)**

Sol. ℓ के मापन में त्रुटि [kgsfl jsij nkc rjax esa का कलान्तर होने के कारण सम्पीडन विरलन के रूप में परावर्तित होगा जबकि बन्द सिरे पर दाब तरंग समान कला में होगी अतः सम्पीड़न सम्पीडन के रूप में परावर्तित होगा।

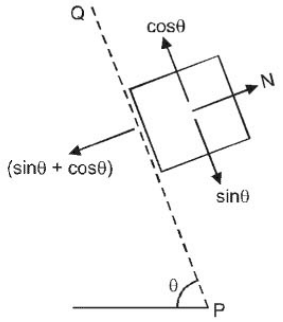
12. द्रव्यमान 0.1 kg का एक छोटा गुटका जड़ित आनत तल PQ पर रखा है। तल और क्षैतिज के बीच कोण θ है। गुटके पर 1N का बल क्षैतिज दिशा में उसके संहति केन्द्र पर लग रहा है। (चित्र देखिये।) गुटका स्थिर रहता है। यदि ($g = 10\ m/s^2$ लें)



(A) $\theta = 45^\circ$ (B) $\theta > 45^\circ$ और गुटके पर घर्षण बल P की ओर है।

(C) $\theta > 45^\circ$ और गुटके पर घर्षण बल Q की ओर है। (D) $\theta < 45^\circ$ और गुटके पर घर्षण बल Q की ओर है।

Ans. **(A), (C)**

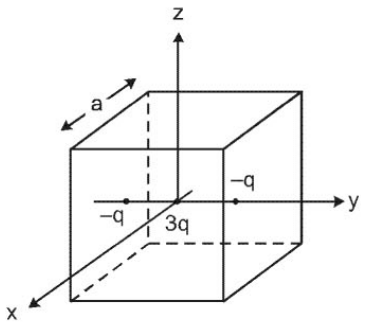


f = 0, यदि $\sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$

f, Q की ओर होगा, $\sin\theta > \cos\theta \Rightarrow \theta > 45^\circ$

f P की ओर होगा, $\sin\theta < \cos\theta \Rightarrow \theta < 45^\circ$

13. एक घनाकार क्षेत्र की भुजा a और केन्द्र उद्‌गम पर हैं। इसमें तीन बिन्दु आवेश रख है : +3q (0, 0, 0) पर, –q (0, –a/4, 0) पर और –q (0, +a/4, 0)। सही विकल्प (विकल्पों का चुनाव करें।



(A) $x = +\frac{a}{2}$ तल से गुजर रहा कुल वैद्युत–फ्लक्स, $x = -\frac{a}{2}$ तल से गुजर रहे कुल वैद्युत–फ्लक्स के बराबर है।

(B) $y = +\frac{a}{2}$ तल से गुजर रहा कुल वैद्युत–फ्लक्स, $y = -\frac{a}{2}$ तल से गुजर रहे कुल वैद्युत–फ्लक्स से अधिक है।

(C) पूरे घनाकर क्षेत्र से गुजर रहा कुल वैद्युत–फ्लक्स, $\frac{q}{\varepsilon_0}$ है।

(D) $z = +\frac{a}{2}$ तल से गुजर रहा कुल वैद्युत–फ्लक्स, $x = +\frac{a}{2}$ तल से गुजर रहे कुल वैद्युत–फ्लक्स से बराबर है।

Ans. **(A), (C)**

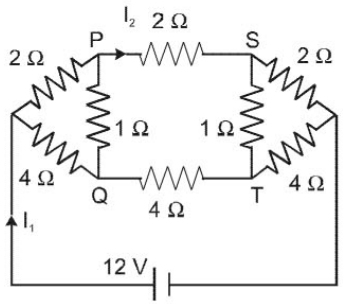
Sol. तल $x = \frac{+a}{2}$ तथा $x = \frac{-a}{2}$ के सापेक्ष सभी आवेश सममित स्थिति में हैं। अतः दोनों तलों से गुजरने वाला फ्लक्स समान होगा

इसी तरह से $y = \frac{+a}{2}$ तथा $y = \frac{-a}{2}$ तल से गुजरने वाला फ्लक्स समान होगा।

$$\phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{3q - q - q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

सममित रूप से $z = \frac{+a}{2}$ तथा $x = \frac{+a}{2}$ तल से गुजरने वाला फ्लक्स समान होगा।

14. चित्र में दर्शाये गये अवरोध–परिपथ के लिये सही (विकल्पों) का चुनाव करें।



(A) PQ में धारा शून्य है।

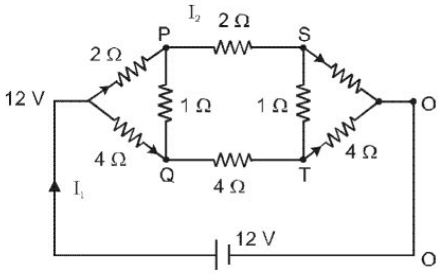
(B) S पर विभव Q पर विभव से कम है।

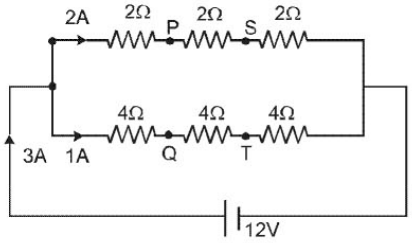
(C) I_1 = 3A

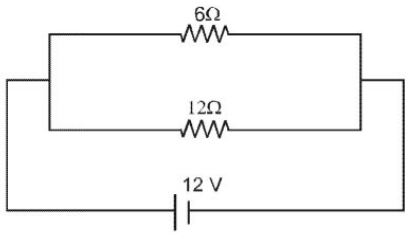
(D) I_2 = 2A

Ans. (A), (B), (C), (D)

Sol. निर्गत व निवेशी सममिती के कारण P तथा Q व S तथा T समान विभव पर होंगे







$R_{eq} = \frac{6\times12}{18} = 4\Omega$

$I_1 = \frac{12}{4} = 3A$

$I_2 = \left(\frac{12}{6+12}\right)\times3$

$I_2 = 2\ A$
$V_A - V_S = 2 \times 4 = 8V$
$V_A - V_T = 1 \times 8 = 8V$
$V_P = V_Q \Rightarrow$ PQ से गुजरने वाली धारा = 0 (A)
$V_P = V_Q \Rightarrow V_Q > V_S$ (C)
$I_1 = 3A$ (B)
$I_2 = 2A$ (D)

15. एक स्थान में एकसमान वैद्युत–क्षेत्र $\vec{E} = E_0\hat{j}$ और एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B} = B_0\hat{j}$ एक साथ स्थित है। इस स्थान में एक ध नात्मक बिंदु आवेश की गति पर विचार करें। समय $t = 0$ पर इस आवेश का वेग $x - y$ तल में $\vec{v}$ है, जो x-अक्ष से θ कोण बनाता है तब $t > 0$ के लिये कौनसा विकल्प सही है।/है ?

(A) यदि $\theta = 0^o$, तब आवेश $x - z$ तल में वृत्तीय–पथ पर घूमता है।

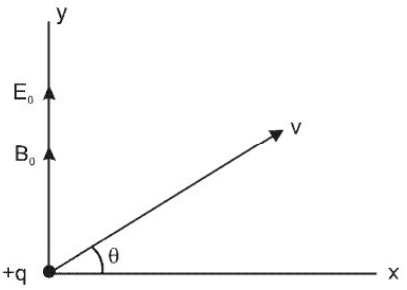
(B) यदि $\theta = 0^o$, तब आवेश y–अक्ष की दिशा में कुंडलिनी–पथ पर चलता है व कुंडलिनी का पिच अपरिवर्तित रहता है।

(C) यदि $\theta = 10^o$, तब आवेश y–अक्ष की दिशा में कुंडलिनी–पथ पर चलता है व कुंडलिनी का पिच समय के साथ बढ़ता रहता है।

(D) यदि $\theta = 90^o$, तब आवेश y–अक्ष की दिशा में रेखीय परंतु त्वरण के साथ गति करता है।

Ans. (C), (D)

Sol.



यदि $\theta = 0°$ है तो चुम्बकीय बल के कारण पथ वृत्ताकार होगा परन्तु वैद्युत बल qE_0 (↑) आवेश q को धनात्मक y–दिशा में त्वरित गति करायेगा। अतः परिणामी पथ परिवर्तित पिच का कुण्डलीनुमा पथ होगा अतः (A) तथा (B) गलत है।

यदि $\theta = 10°$ है तो $v\cos\theta$ के कारण पथ वृत्ताकार होगा तथा आवेश पर वैद्युत बल qE_0 तथा $v\sin\theta$ के कारण आवेश धनात्मक y दिशा में त्वरित गति करेगा, अतः परिणामी पथ परिवर्तित पिच का कुण्डलीनुमा पथ होगा अतः (C) सही है

यदि $\theta = 90°$ तब $F_B = 0$ तथा वैद्युत बल qE_0 के कारण आवेश धनात्मक y-दिशा में त्वरित गति करेगा अतः (D) सही है।

खण्ड - III : पूर्णांक उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **5 प्रश्न** है। इर प्रश्न का उत्तर **एक अंक का पूर्णांक**, 0 से 9 (दोनों सहित), तक है।

16. एक प्रोटोन को सीधे एक नाभिक (Q = 120 e, जहाँ e इलेक्ट्रोनिक आवेश है) की ओर बहुत दूर से दागा जाता है। यह प्रोटॉन नाभिक से 10 fm की निकटतम दूरी तक पहुँचता है। प्रोटोन के चलना आरम्भ करते समय उसकी de Broglie तरंग दैर्ध्य (fm में) क्या है ? (मानें : प्रोटॉन का द्रव्यमान, $m_p = \frac{5}{3}\times10^{-27}$kg $\frac{h}{e} = 4.2 \times 10^{-15}$ J.s/C; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ m/F; 1fm = 10^{-15}m)

Ans. 7 fm

Sol. +120 e r = 10 fm +e

$$\frac{(9\times10^9)(120e)(e)}{10\times10^{-15}} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \therefore\ p^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}$$

$$2\left(\frac{5}{3}\times10^{-27}\right)10^{15}(9\times10^9)(12)e^2 = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

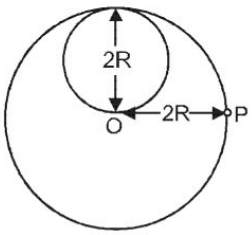
$(120)\ (3)10^{-27+15+9}$ $\lambda^2 = (4.2)^2 \times 10^{-30}$

$$\lambda^2 = \frac{4.2\times4.2\times10^{-30}}{360\times10^{-3}} = \frac{42\times42}{360}\times10^{-29} = 7^2\times10^{-30}$$

$\lambda = 7\times10^{-15}$ m

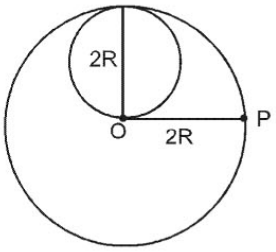
= 7 fm

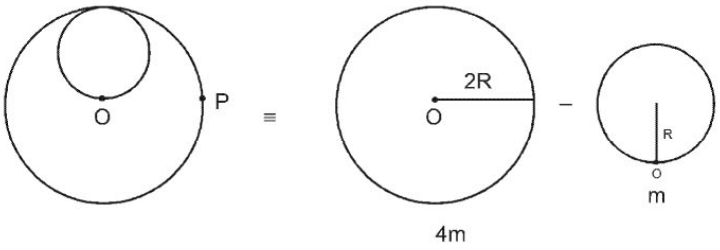
17. एक एकसमान द्रव्य घनत्व की 2R त्रिज्या की गोल डिस्क में से एक 2R व्यास की छोटी गोल डिस्क निकालकर एक पटल (lamina) बनाया गया है (चित्र देखिए)। इस पटल का जड़त्व–आघूर्ण O और P से जानेवाले अक्षों के परितः क्रमशः I_0 एवं I_1 हैं। दोनों अक्ष पटल के तल के लम्बवत् हैं। तब अनुपात $\frac{I_P}{I_0}$ निकटतम पूर्णांक में क्या है ?



Ans. 3

Sol.

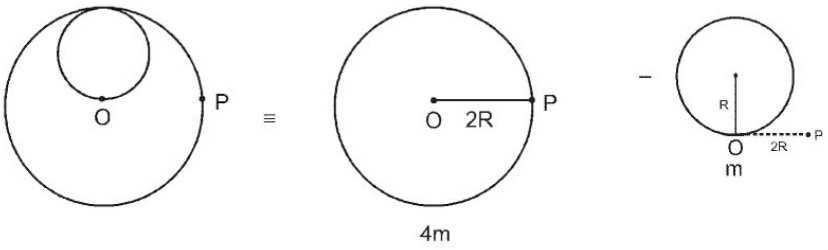




$$I_0 = \frac{(4m)(2R)^2}{2} - \frac{3}{2}mR^2$$

$$= mR^2\left[8 - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}mR^2$$



$$I_P = \frac{3}{2}(4m)(2R)^2 - \left[\frac{mR^2}{2} + m[(2R)^2 + R^2]\right]$$

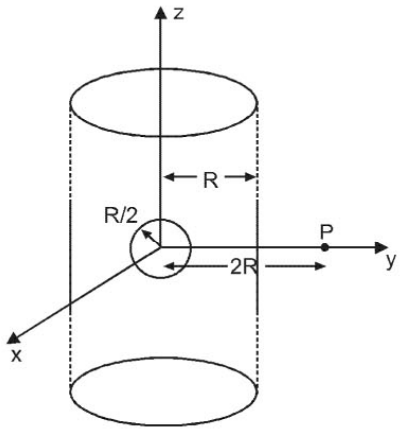
$$= 24\,mR^2 - \frac{11}{2}mR^2$$

$$= \frac{37}{2}mR^2$$

$$\frac{I_P}{I_O} = \frac{\frac{37}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{37}{13} \approx 3$$

Ans. 3

18. अपरिमित लम्बाई और R त्रिज्या के एक ठोस बेलन पर एक समान आयतन–आवेश–घनत्व ρ है। इसमें R/2 त्रिज्या एक खोखला गोलीय–कोष बेलन के अक्ष पर केन्द्रित है (चित्र देखिये)।। अक्ष से 2R दूरी पर स्थित बिन्दु P पर वैद्युत $\frac{23\rho R}{16k\varepsilon_0}$ से दिया जाता है। तब k का मान क्या है ?



Ans. **K = 6**

$$E_1 = \frac{\rho . R^2}{\varepsilon_0 . 2R}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho . \frac{4}{3}\pi . \frac{R^3}{8}}{(2R)^2}$$

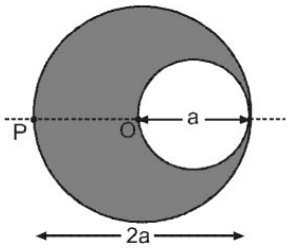
$$E_1 - E_2 = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho . R}{\varepsilon_0 . 24 \times 4}$$

$$= \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{24}\right]$$

$$= \frac{23\rho R}{96\varepsilon_0} = \frac{23\rho R}{16K\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ K = 6

19. व्यास 2a के एक बेलन में, त्रिज्या a का एक खोखला बेलनीय –कोश है (चित्र देखिये) और दोनों अपरिमित लम्बे हैं। इनकी लम्बाई की दिशा में इनके एक समान धारा–घनत्व J है। यदि बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र का मान $\frac{N}{12}\mu_0 aJ$ है, तब N का मान क्या है ?



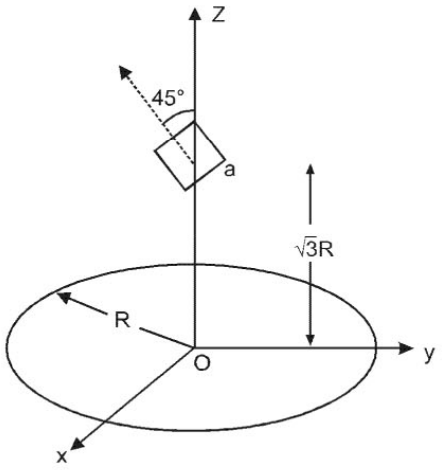
Ans N = 5

Sol $B_1 = \frac{\mu_o J a}{2} - \frac{\mu_o J a}{12}$

$= \left(\frac{\mu_o J a}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{\mu_o J a}{2}\right) = \frac{5\mu_0 aJ}{12} = \frac{N}{12}\mu_0 aJ$

N = 5

20. चित्र में दर्शाये अनुसार R त्रिज्या का एक वृत्ताकार तार लूप (पाश) x–y तल में रखा है और इसका केन्द्र O पर है। इस वृत्ताकार लूप के अक्ष पर भुजा a (a << R) की दो फेरों वाली वर्ग–कुंडली रखी है जिसका केन्द्र $z = \sqrt{3}R$ पर है (चित्र देखिये)। कुण्डली का तल z- अक्ष से 45° कोण पर है। यदि लूप और कुंडली का अन्योन्य प्रेरकत्व $\frac{\mu_0 a^2}{2^{p/2}R}$ है, तब p का मान क्या है ?



Ans. 7

Sol. $B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + X^2)^{3/2}}$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + 3R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2(4R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i R^2}{2 \cdot 2^3 \cdot R} = \frac{\mu_0 i}{16R}$$

$\phi = NBA \cos 45°$

$$= 2\frac{\mu_0 i}{16R} a^2 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i a^2}{8\sqrt{2}R}$$

$$M = \frac{\phi}{i}$$

$$M = \frac{\mu_0 a^2}{2^{7/2}R} = \frac{\mu_0 a^2}{2^{P/2}R}$$

$P = 7$

भाग - II : रसायन विज्ञान

खण्ड - I : एकल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **10** बहुविकल्प प्रश्न है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A), (B), (C) और (D) है, जिनमें से एक ही सही है।

21. यौगिकों का कौनसा घटता क्रम नाइट्रोजन की घटती ऑक्सीकरण अवस्था (oxidation state) के अनुसार है?

(A) HNO_3, NO, NH_4Cl, N_2 (B) HNO_3, NO, N_2, NH_4Cl

(C) HNO_3, NH_4Cl, NO, N_2 (D) NO, HNO_3, NH_4Cl, N_2

Ans. **(B)**

Sol.

यौगिक	नाइट्रोजन का ऑक्सीकरण अवस्था
HNO_3	= + 5
NO	= +2
NH_4Cl	= –3
N_2	= 0

अतः सही क्रम HNO_3, NO, N_2, NH_4Cl होगा।

22. एक हाइड्रोजन परमाणु में द्वितीय बोर (Bohr) कक्षा में इलेक्ट्रॉन (electron) की गतिक ऊर्जा (kinetic energy) है [a_0 : बोर त्रिज्या (Bohr radius)]

(A) $\frac{h^2}{4\pi^2 m a_0^2}$ (B) $\frac{h^2}{16\pi^2 m a_0^2}$ (C) $\frac{h^2}{32\pi^2 m a_0^2}$ (D) $\frac{h^2}{64\pi^2 m a_0^2}$

Ans. **(C)**

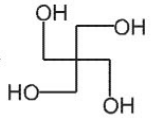
Sol. $mv\,(4a_0) = \frac{h}{\pi}$

so, $v = \frac{h}{4m\pi a_0}$

so $KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,m.\,\frac{h^2}{16m^2\pi^2 a_0^2} = \frac{h^2}{32m\pi^2 a_0^2}$

23. निम्नलिखित रूपांतरण में ऐल्डोल अभिक्रिया(ओं) (aldol reaction (s)) की संख्या है

$$CH_3CHO + 4HCHO \xrightarrow{\text{सान्द्र जलीय NaOH}}$$



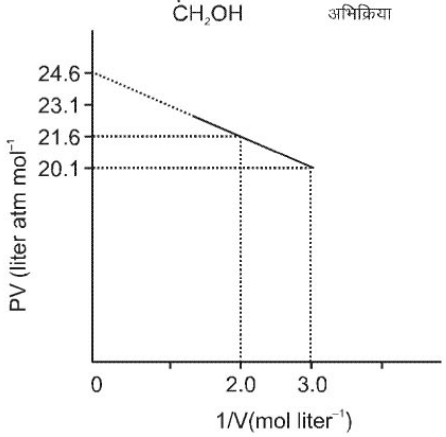
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Ans. **(C)**

Sol. $CH_3-CHO+HCHO \xrightarrow[\text{पहला ऐल्डोल संघनन}]{OH^{\ominus}} \underset{\underset{CH_2-OH}{|}}{CH_2-CHO} \xrightarrow[\text{दूसरा ऐल्डोल संघनन}]{OH^{\ominus}/HCHO} \underset{\underset{CH_2-OH}{|}}{\overset{\overset{CH_2-OH}{|}}{CH-CHO}} \xrightarrow[\text{तीसरा ऐल्डोल संघनन}]{OH^{\ominus}/HCHO} HOCH_2-\underset{\underset{CH_2OH}{|}}{\overset{\overset{CH_2OH}{|}}{C}}-CHO$

$$HOCH_2-\underset{\underset{CH_2OH}{|}}{\overset{\overset{CH_2OH}{|}}{C}}-CH_2OH \xleftarrow[\text{कैनीजारो अभिक्रिया}]{OH^-/HCHO}$$

24. जब b = 0 और T = 300 K है, तब एक मोल वांडरवाल (van der Walls) गैस के लिए PV vs 1/V रेखाचित्र नीचे दिखाया गया है। वांडरवाल स्थिरांक a (atm.liter^2 mol^{-2}) का मान है :

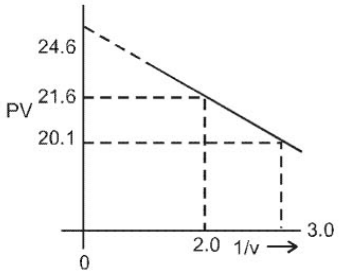


(A) 1.0 (B) 4.5

(C) 1.5 (D) 3.0

Ans. **(C)**

Sol.



$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V) = RT$$

$PV + a/V = RT$

$PV = RT - a(v)$

$y = RT - a(x)$

अतः ढाल = $a = \frac{21.6-20.1}{3-2} = \frac{1.5}{1} = 1.5$

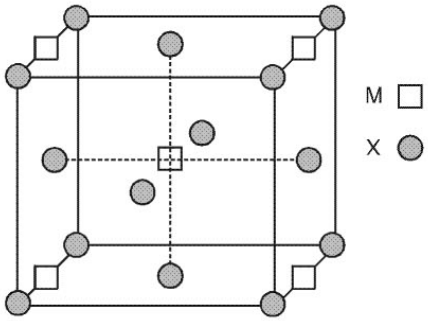
25. ऐलीन (allene ; C_3H_4) में कार्बन परमाणुओं के संकरण (hybridisation) के प्रकार यह (ये) है (हैं)।

(A) sp और sp^3 (B) sp और sp^2 (C) केवल sp^3 (D) sp^2 और sp^3

Ans. **(B)**

Sol. C_3H_4 $\underset{H}{\overset{H}{\diagdown}}C=C=C\underset{H}{\overset{H}{\diagup}}$ (sp^2 sp sp^2)

26. यौगिक M_pX_q में X के संदर्भ में घनीय निबिड़ संकुलित संरचना (ccp) की व्यवस्था है। इसकी एकक कोष्ठिका संरचना (unit cell structure) चित्र में दिखायी गई है इसका मूलानुपाती सूत्र (empirical formula) है।



(A) MX (B) MX_2 (C) M_2X (D) M_5X_{14}

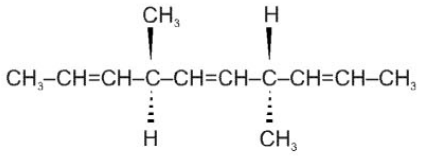
Ans. **(B)**

Sol. M परमाणुओं की संख्या = $\frac{1}{4} \times 4 + 1 = 1 + 1 = 2$

X परमाणुओं की संख्या = $\frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{8} \times 8 = 3 + 1 = 4$

इसलिए सूत्र = $M_2X_4 = MX_2$

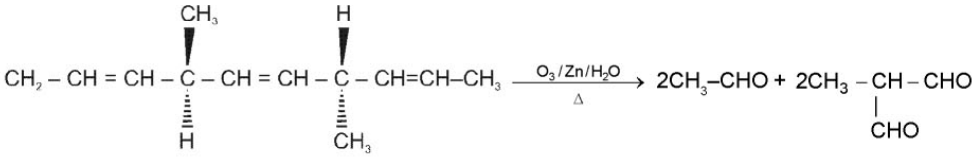
27. दिये यौगिक के संपूर्ण ओजोनी–अपघटन (ozonolysis) होने पर ध्रुवण घूर्णक (optically active) उत्पादों की संख्या है।



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Ans. **(A)**

Sol.



सभी प्रकाशिक अक्रिय उत्पाद

28. आइ.यू.पी.ए.सी. (IUPAC) नाम पद्धति के अनुसार यौगिक (complex) $[Co(H_2O)_4(NH_3)_2]Cl_3$ का नाम है

(A) टेट्राएक्वाडाऐमीनकोबाल्ट (III) क्लोराइड [Tetraaquadiaminecobalt (III) chloride]

(B) टेट्राएक्वाडाऐम्मीनकोबाल्ट (III) क्लोराइड [Tetraaquadiamminecobalt (III) chloride]

(C) डाइऐमीनटेट्राएक्वाकोबाल्ट (III) क्लोराइड [Diaminetetraaquacoblat (III) chloride]

(D) डाइऐम्मीनटेट्राएक्वाकोबाल्ट (III) क्लोराइड [Diamminetetraaquacobalt (III) chloride]

Ans. **(D)**

Sol. $[Co(H_2O)_4(NH_3)_2]Cl_3$
= डाइऐमीनटेट्राएक्वाकोबाल्ट (III) क्लोराइड

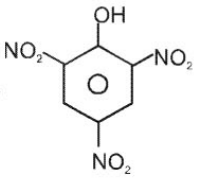
29. कार्बोक्सिल अभिलाक्षणिक समूह (–COOH Functional group) किस में उपस्थित है?

(A) पिक्रिक अम्ल (picric acid) (B) बार्बिट्यूरिक अम्ल (barbituric acid)

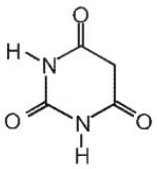
(C) ऐस्कार्बिक अम्ल (ascorbic acid) (D) ऐस्पिरिन (aspirin)

Ans. **(D)**

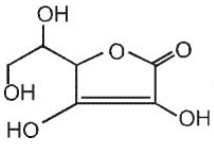
Sol.



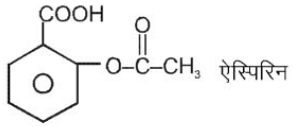
पिक्रिक अम्ल ;



बार्बिट्यूरिक अम्ल



ऐस्कार्बिक अम्ल ;



ऐस्पिरिन

30. $CuSO_4$ के जलीय घोल द्वारा अवशोषित प्रकाश (light absorbed) का रंग है।

(A) नारंगी–लाल (organge-red) (B) नीला–हरा (blue-green)

(C) पीला (yellow) (D) बैंगनी (violet)

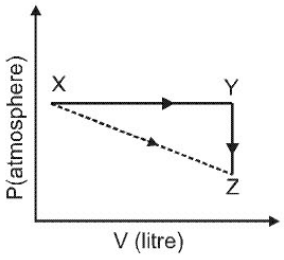
Ans. **(A)**

Sol. $CuSO_4$ नारंगी लाल रंग का अवशोषण करेगा तथा यह नीला रंग प्रदर्शित करेगा।

खण्ड - II : बहुल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में 5 बहुविकल्प प्रश्न हैं। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A), (B), (C) और (D) है, जिनमें से एक या अधिक सही है।

31. एक आदर्श गैस के लिए, आरम्भिक अवस्था X से अंतिम अवस्था Z तक जाने के लिए केवल P-V कार्य का विचार करें। अंतिम अवस्था Z तक पहुँचने के लिए दो पक्ष है जिनमें से कोई भी पथ संभव है जैसा कि रेखाचित्र में दिखाया गया है निम्नलिखित विकल्पों में कौन विकल्प सही है/हैं ? (ΔS को एन्ट्रॉपी बदलाव और w को किया गया कार्य मानें)



(A) $\Delta S_{x\to z} = \Delta S_{x\to y} + \Delta S_{y\to z}$

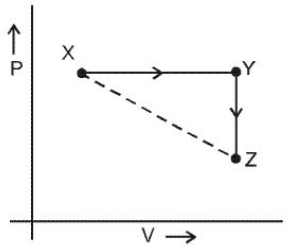
(B) $w_{x\to z} = w_{x\to y} + w_{y\to z}$

(C) $w_{x\to y\to z} = w_{x\to y}$

(D) $\Delta S_{x\to y\to z} = \Delta S_{x\to y}$

Ans. **(AC)**

Sol.



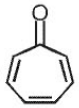
(A) $\Delta S_{x\to z} = \Delta S_{x\to y} + \Delta S_{y\to z}$ (सत्य)

(B) $W_{x\to y} = W_{x\to y} + W_{y\to z}$ (असत्य)

(C) $W_{x\to y\to z} = W_{x\to y}$ (सत्य)

(D) $\Delta S_{x\to y\to z} = \Delta S_{x\to y}$ (असत्य)

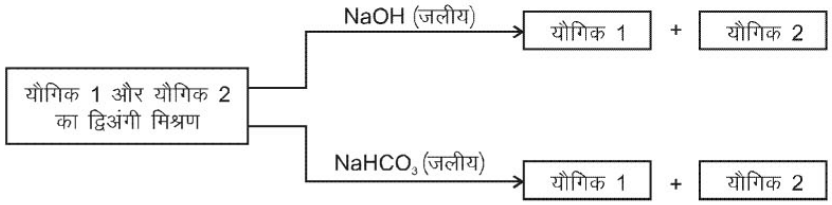
32. शुद्ध रूप में, दिये गये अणुओं में से, कमरे के ताप पर, कौन अणु अस्थिर (unstable) है/हैं ?

(A) (B) (C) (D) 

Ans. **(B)**

Sol. एन्टीऐरोमैटिक एवं अस्थायी है।

33. दिये हुए द्विअंगी (binary) मिश्रणों में से कौन से मिश्रण नीचे दिखाई गई स्कीम (scheme) जैसे विभेदि निष्कर्षण (differential extraction) से अपने यौगिकों में पृथक किये जा सकते है (हैं) ?



(A) C_6H_5OH और C_6H_5COOH (B) C_6H_5COOH और $C_6H_5CH_2OH$

(C) $C_6H_5CH_2OH$ और C_6H_5OH (D) $C_6H_5CH_2OH$ और $C_6H_5CH_2COOH$

Ans. **(BD)**

Sol. **(B)** $C_6H_5COOH + C_6H_5CH_2OH \xrightarrow{\text{जलीय.NaOH}}$ 1(विलेय) + 2 (अविलेय)

1 2

$\downarrow$ जलीय $NaHCO_3$

1 (विलेय) + 2 (अविलेय)

(D) $C_3H_5CH_2OH + C_6H_5CH_2COOH \xrightarrow{\text{जलीय.NaOH}} 1\text{ (अविलेय)} + 2\text{(विलेय)}$

1 2

$\downarrow$ जलीय $NaHCO_3$

(1) (अविलेय) + 2 (विलेय).

34. **द्रिवविरागी** कोलाइडल कण (**lyophobic** colloidal particles) की स्थिरता (stability) के सही कारण चुनिए।

(A) इनके पृष्ठ पर आयनों का विलयन में वर्णात्मक (preferential) अधिशोषण होना।

(B) इनके पृष्ठ पर विलायक का विलयन में वर्णात्मक अधिशोषण होना।

(C) इनके पृष्ठ कणों के पृष्ठ पर विपरीत आवेशों के बीच आकर्षण होना।

(D) इनके चारों और स्थिर परत और विसरित परत के बीच विपरीत आवेशों के कारण विभवान्तर होना।

Ans. **(AD)**

Sol. (A) सम आयनों के वर्णान्तमक अधिशोषण के कारण

(C) प्रतिकर्षण के कारण ना कि आकर्षण के कारण

(D) किसी भी कोलाइडल कण के चारो और विपरीत आवेशित कणों की परत, सम्पर्ण निकाय की स्थितिज ऊर्जा में कमी करता है।

35. दिए हुए हाइड्रोजन हैलाइडस (hydrogen halides) में से कौन $AgNO_3$ (जलीय) से क्रिया पर ऐसा अवक्षेप (precipites) देते है जो कि $Na_2S_2O_3$ (जलीय) में घुल जाते है ?

(A) HCl (B) HF (C) HBr (D) HI

Ans. **(ACD)**

Sol. $AgNO_2 + HCl \longrightarrow AgCl\downarrow$

$AgNO_3 + HBr \longrightarrow AgBr\downarrow$

$AgNO_3 + HI \longrightarrow AgI\downarrow$

सभी अवक्षेप हाइपो विलयन में विलेय या होकर $Na_3[Ag(S_2O_3)_2]$ बनाते हैं।

खण्ड - III : पूर्णांक उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **5** प्रश्न हैं। हर प्रश्न का उत्तर एक अंक का पूर्णांक, **0** से **9** (दोनों सहित) तक, है।

36. एक कार्बनिक यौगिक का प्रथम कोटि से वियोजन (decomposition) होता है। इसके प्रारम्भिक सान्द्रंण (initial concentration) के 1/8 और 1/10 भाग तक वियोजित होने में क्रमशः $1_{1/8}$ और t_{10} समय लगता है। $\frac{[1_{t/8}]}{[t_{1/10}]} \times 10$ का मान निकालिये ($\log_{10}2 = 0.3$ लें)

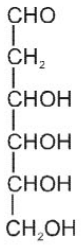
Ans. 9

Sol. $Kt_{1/8} = \ln\left\{\frac{C_O}{C_O/8}\right\} = \ln 8$

$Kt_{1/10} = \ln\left\{\frac{C_O}{C_O/10}\right\} = \ln 10$

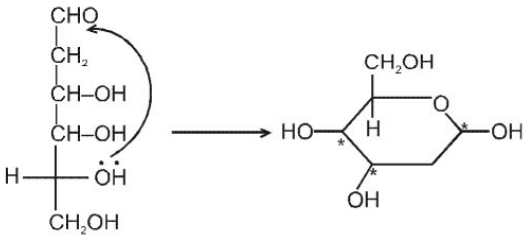
तब $\frac{t_{1/8}}{t_{1/10}} \times 10 = \frac{\ln 8}{\ln 10} \times 10 = \frac{\log 2}{\log 10} \times 10 = 9$

37. जब दिया हुआ एल्डोहेक्सोस डी–विन्यास संरचना (D- configuration) में है तब उसके पाइरैनोस (pyronose) रूप के विभिन्न त्रिविम समावयवी (stereoisomers) रूपों की कुल संख्या है।



Ans. 8

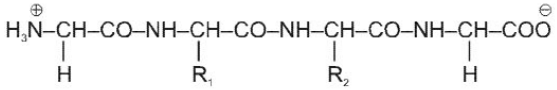
Sol.



D

कुल त्रिविम समावयवी = $2^3 = 8$

38. नीचे दि गई सारणी में नौ पेप्टाइडों (prepitdes) के R_1 और R_2 प्रतिस्थायी (substituents) दिये हुये हैं। इनमें से कितने पेप्टाइड pH = 7.0 पर धनात्मक आवेशित (positively charged) हैं?



Peptide	R_1	R_2
I	H	H
II	H	CH_3
III	CH_2COOH	H
IV	CH_2CONH_2	$(CH_2)_4NH_2$
V	CH_2CONH_2	CH_2CONH_2
VI	$(CH_2)_4NH_2$	$(CH_2)_4NH_2$
VII	CH_2COOH	CH_2CONH_2
VIII	CH_2OH	$(CH_2)_4NH_2$
IX	$(CH_2)_4NH_2$	CH_3

Ans. 4

Sol. दिये गये पॉलीपेप्टाइड का समविभव बिन्दु 7 से अधिक होगा। इसका मतलब है कि पॉलीपेप्टाइड क्षारीय प्रकृति का है और इसमें दो या दो से अधिक एमीनो समूह होने चाहिए। अतः (iv) , (vi), (viii) तथा (ix) सही विकल्प हैं।

39. आवर्त सारणी में 18 ग्रुप (group) है। तांबे (copper) के एक समस्थानिक (isotope) को प्रोटॉनों (protons) से बमबारी (bombardment) करने पर नीचे दिखाई गयी नाभिकीय अभिक्रिया (nuclear reaction) होती है जिसमें तत्व X जनित होता है। तत्व X आवर्त सारणी के किस गुप में है?

$$^{63}_{29}C + ^{1}_{1}H \rightarrow 6^{1}_{0}n + \alpha + 2^{1}_{1}H + X$$

Ans. 8

Sol. $^{63}_{29}Cu + ^{1}_{1}H \rightarrow 6^{1}_{0}n + ^{4}_{2}\alpha + 2^{1}_{1}H + X$

$64 = 6 + 4 + 2 + A \quad \Rightarrow \quad A = 52$

$29 + 1 = 30 = 0 + 2 + 2 + z \Rightarrow z = 26$

तत्व X, Fe होना चाहिए और इसका ग्रुप 8 है।

40. 29.2% (w/w) HCl के एक स्टॉक विलयन का घनत्व 1.25 g mL^{-1} है। HCl का आण्विक भार 36.5 g mol^{-1} है। 0.4 M HCl के 200 mL विलयन को बनाने के लिए इस स्टॉक विलयन की कितनी मात्रा (mL) चाहियें?

Ans. 8 mL.

Sol. 29.2% (w/w) HCl विलयन का घनघ्त्व = 1.25 g/ml

0.4 M HCl विलयन के लिए HCl के मोल

= 0.4 × 0.2 मोल = 0.08 मोल

यदि v mol HCl विलयन है, तो विलयन का द्रव्यमान

= 1.25 v

HCl का द्रव्यमान = (1.25 v × 0.292)

$$\text{HCl के मोल} = \frac{1.25v \times 0.292}{36.5} = 0.08$$

इसलिए, $v = \frac{36.5 \times 0.08}{0.29 \times 1.25}$ mol = 8 mL

भाग - III : गणित (MATHEMATICS)

खण्ड - I : एकल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **10 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक ही सही** है।

41. बिन्दु P बिंदुओं Q(2, 3, 5) और R(1, –1, 4) से गुजरने वाली सरल रेखा एवं समतल $5x - 4y - z = 1$ का प्रतिच्छेदी बिंदु है। यदि बिंदु T(2, 1, 4) से QR पर डाले गये लम्ब का लम्ब–पाद S है तो रेखा–खण्ड PS की लम्बाई निम्न है–

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

Sol. **Ans. (A)**

QR का समीकरण होगा

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{1}$$

माना $P \equiv (2 + \lambda, 3 + 4\lambda, 5 + \lambda)$

$10 + 5\lambda - 12 - 16\lambda - 5 - \lambda = 1$

$-7 - 12\lambda = 1$

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2}{3}$

तो $P \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

माना $S = (2 + \mu, 3 + 4\mu, 5 + \mu)$

$$\vec{TS} = (\mu)\hat{i} + (4\mu + 2)\hat{j} + (\mu + 1)\hat{k}$$

$$\vec{TS} \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$\mu + 16\mu + 8 + \mu + 1 = 0$

$$\mu = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{9}{2}\right)$$

$$PS = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{4}{9} + \left(\frac{13}{3} - \frac{9}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

42. समाकलन $\int \frac{\sec^2 x}{(\sec x+\tan x)^{9/2}} dx$ का मान निम्न है (किसी यादृच्छिक अचर (arbitrary constant) K के लिये)

(A) $\frac{-1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}-\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}+K$

(B) $\frac{1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}-\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}+K$

(C) $\frac{-1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}+\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}+K$

(D) $\frac{1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}+\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}+K$

Sol. **Ans (C)**

secx + tanx = t रखने पर

$(\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$

$\sec x \,.\, t\, dx = dt$

$\sec x - \tan x = \frac{1}{t}$

$\sec x = \frac{t+\frac{1}{t}}{2}$

$$\int \frac{\sec x.dt}{t^{9/2}.t} = \int \frac{1}{2}\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t.t^{9/2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^{9/2}}+\frac{1}{t^{13/2}}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{7t^{7/2}}+\frac{2}{11t^{11/2}}\right]+k$$

$$= -\frac{1}{t^{11/2}}\left[\frac{t^2}{7}+\frac{1}{11}\right]+k$$

43. माना कि z एक सम्मिश्र संख्या है जिसका काल्पनिक भाग शून्य नहीं है और $a = z^2 + z + 1$ वास्तविक है। तब वह मान जो a नहीं ले सकता, निम्न है

(A) –1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

Sol. **Ans (D)**

यहाँ $z^2 + z + 1 - a = 0$

$\Rightarrow \quad z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$

यहाँ $a \neq \dfrac{3}{4}$ अन्यथा z विशुद्ध वास्तविक होगा।

44. दिया है कि $f(x) = \begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in IR$ तब f

(A) $x = 0$ एवं $x = 2$ दोनों पर अवकलनीय है

(B) $x = 0$ पर अवकलनीय है परन्तु $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है

(C) $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है परन्तु $x = 2$ पर अवकलनीय है

(D) $x = 0$ एवं $x = 2$ दोनों पर अवकलनीय नहीं है

Sol. **Ans (B)**

(I) $x = 0$ पर अवकलनीयता के लिये –

L.H.D. $= f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0-h)-f(0)}{-h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2\left|\cos\left(-\dfrac{\pi}{h}\right)\right| - 0}{-h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} -h \cdot \left|\cos\dfrac{\pi}{h}\right| = 0$

RHD $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{h}\right)\right| - 0}{h} = 0$

अतः $x = 0$ पर $f(x)$ अवकलनीय है।

(ii) $x = 2$ पर अवकलनीयता के लिये –

$$RHD = f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\left|\cos\left(\frac{\pi}{2+h}\right)\right|-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\cos\left(\frac{\pi}{2+h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2+h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\sin\left(\frac{\pi h}{2(2+h)}\right)}{\left(\frac{\pi}{2(2+h)}\right)h}.\frac{\pi}{2(2+h)}$$

$$= (2)^2 . \frac{\pi}{2(2)} = \pi$$

$$LHD = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\left|\cos\left(\frac{\pi}{2-h}\right)\right|-0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2-h}\right)\right)-0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2\cos\left(\frac{\pi}{2-h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2-h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\sin\left(-\frac{\pi h}{2(2-h)}\right)}{\left(-\frac{\pi h}{2(2-h)}\right)}.\frac{-\pi}{2(2-h)} = -\pi$$

अतः $x = 2$ पर $f(x)$ अवकलनीय नहीं है।

45. विभिन्न रंगों की पांच गेंदों को तीन लोगों में इस प्रकार बाँटने के कुल तरीकों की संख्या जिसमें प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम एक गेंद अवश्य मिले, निम्न है

(A) 75 (B) 150 (C) 210 (D) 243

Sol. **Ans (B)**

	B_1	B_2	B_3
Case-1:	1	1	3
Case-2:	2	2	1

बाँटने के तरीके $= \frac{5!}{1!1!3!2!} \cdot 3! + \frac{5!}{2!2!1!2!} \cdot 3!$

$= 150$

46. यदि $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right) = 4$ है, तब

(A) a = 1, b = 4 (B) a = 1, b = –4

(C) a = 2, b = –3 (D) a = 2, b = 3

Sol. **Ans (B)**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right) = 4$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(1-a)+x(1-a-b)+(1-b)}{x+1}\right) = 4$$

सीमा परिमित है।

यह विद्यमान होगी यदि $1 - a = 0 \quad \Rightarrow a = 1$

तब $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-a-b+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 4$$

$\therefore \quad 1 - a - b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -4$

47. फलन $f : [0, 3] \to [1, 29]$, जो निम्नानुसार परिभाषित किया गया है

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$, निम्न प्रकार का है

(A) ऐकिक (one-one) और आच्छादक (onto) (B) आच्छादक है पर ऐकिक नहीं

(C) ऐकिक है पर आच्छादक नहीं (D) न ऐकिक है न ही आच्छादक

Sol. **Ans (B)**

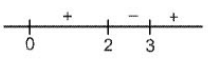
$F : [0, 3] \to [1, 29]$

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

$= 6(x^2 - 5x + 6)$

$= 6(x - 2)(x - 3)$



दिये गये प्रान्त में फलन स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है। अः यह बहुऐकी है।

अब $x = 0$ पर $f(0) = 1$

$x = 2 \quad f(2) = 16 - 60 + 72 + 1 = 29$

$x = 3 \quad f(3) = 54 - 135 + 108 + 1$

$= 163 - 135 = 28$

अतः परिसर $= [1, 29]$

अतः दिया गया फलन आच्छादक है।

48. सरल रेखा $4x - 5y = 20$ के बिन्दुओं से वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ पर डाली गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा (chord of contact) के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ (locus) निम्न है

(A) $20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$ (B) $20(x^2 + y^2) + 36x - 45y = 0$

(C) $36(x^2 + y^2) - 20x + 45y = 0$ (D) $36(x^2 + y^2) + 20x - 45y = 0$

Sol. **Ans (A)**

वृत्त है: $x^2 + y^2 = 9$

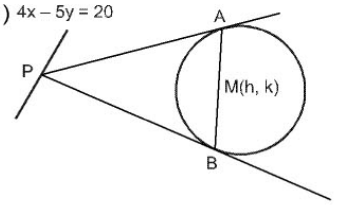
सरल रेखा है: $4x - 5y = 20$

$$P\left(t, \frac{4t-20}{5}\right)$$

जीवा AB जिसका मध्य बिन्दु M (h, k) है का समीकरण है :

$T = S_1$

$\therefore \quad hx + ky = h^2 + k^2$ .....(1) $4x - 5y = 20$



बिन्दु P के सापेक्ष स्पर्श जीवा AB का समीकरण

$T = 0$

$$tx + \left(\frac{4t-20}{5}\right)y = 9 \qquad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर

$$\frac{h}{t} = \frac{5k}{4t-20} = \frac{h^2+k^2}{9}$$

हल करने पर

$45k = 36h - 20h^2 - 20k^2$

$\Rightarrow$ बिन्दुपथ है : $20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$

49. माना कि $P = [a_{ij}]$ एक 3×3 आव्यूह (matrix) है और $Q = [b_{ij}]$, जहाँ $b_{ij} = 2^{i+j}a_{ij}$ जब $1 \le i, j \le 3$ है। यदि P के सारणिक (determinant) का मान 2 है तो आव्यूह Q के सारणिक का मान निम्न है

(A) 2^{10} (B) 2^{11} (C) 2^{12} (D) 2^{13}

Sol. **Ans (D)**

दिया गया है $P = [a_{ij}]_{3\times3}$ $b_{ij} = 2^{i+j}$ aij

$Q = [b_{ij}]_{3\times3}$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |P| = 2$$

$$Q = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a_{11} & 8a_{12} & 16a_{13} \\ 8a_{21} & 16a_{22} & 32a_{23} \\ 16a_{31} & 32a_{32} & 64a_{33} \end{bmatrix}$$

$$Q \text{ का सारणिक } = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 8a_{12} & 16a_{13} \\ 8a_{21} & 16a_{22} & 32a_{23} \\ 16a_{31} & 32a_{32} & 64a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 8 \times 16 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 8 \times 16 \times 2 \times 4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= 2^2 . 2^3 . 2^4 . 2^1 . 2^2 . 2^1$
$= 2^{13}$

50. आयत R जिसकी भुजायें निर्देशांक अक्षों के समान्तर है के अन्दर दीर्घवृत्त $E_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ को उत्कीर्णित (inscribe) किया गया है। एक अन्य दीर्घवृत्त E_2 जो बिन्दु (0, 4) से गुजरता है और आयत R को परिगत (circumscribe) करता है, की उत्केन्द्रता (eccentricity) निम्न है

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

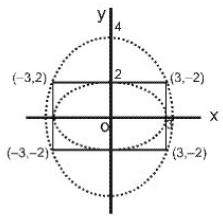
Sol. **Ans (C)**

माना कि अभीष्ट दीर्घवृत्त है

$$E_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

यह बिन्दु (0, 4) से गुजरता है :

$0 + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16$



यह बिन्दु (±3, ±2) से भी गुजरता है

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2(1 - e^2)$$

$$\frac{12}{16} = 1 - e^2$$

$$e^2 = 1 - \frac{12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$e = \frac{1}{2}$$

खण्ड - II : बहुल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **5 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक या अधिक** सही है।

---

51. यदि y(x) अवकल समीकरण $y' - y\tan x = 2x\sec x$ को संतुष्ट करता है और $y(0) = 0$, तब

(A) $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$ (B) $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{18}$

(C) $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$ (D) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$

Sol. **Ans (AD)**

$\frac{dy}{dx} - y\tan x = 2x\sec x$

$y(0) = 0$

I.F. $= e^{-\int \tan x\,dx} = e^{-\log\sec x}$

I.F. $= \cos x$

$\cos x \cdot y = \int 2x\sec x.\cos x\,dx$

$\cos x.\ y = x^2 + c$

$c = 0$

$y = x^2\sec x$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}.\sqrt{2} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{16}.\sqrt{2}$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}.2 = \frac{2\pi^2}{9}$

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\pi}{2}.2 + \frac{\pi^2}{9}.2.\sqrt{3}$

$\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

52. एक जहाज में तीन इंजन $E_1, E_2,$ और E_3 लगे हैं जो एक दूसरे से स्वतंत्र रूप से कार्य करते है और जिनके कार्य करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ है। जहाज को चलने के लिये कम से कम दो इंजनों का कार्य करना आवश्यक है। माना कि जहाज चलने की घटना X है और E_1, E_2 और E_3 के कार्य करने की घटनायें क्रमशः $X_1, X_2,$ और X_3 है। तो निम्न में से कौन सही है/हैं ?

(A) $P\left[X_1^c \mid x\right] = \frac{3}{16}$ (B) P[दो और केवल दो (exactly two) इंजन कार्य कर रहे हैं। X] = $\frac{7}{8}$

(C) $P[X \mid X_2] = \frac{5}{16}$ (D) $P[X \mid X_1] = \frac{7}{16}$

Sol. **Ans (BD)**

$P(x_1) = \frac{1}{2}$

$P(x_2) = \frac{1}{4}$

$P(x_3) = \frac{1}{4}$

$P(x) = P(E_1 E_2 E_3) + P(\bar{E}_1 E_2 E_3) + P(E_1 \bar{E}_2 E_3) + P(E_1 E_2 \bar{E}_3)$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}$

$P(x) = \frac{1}{4}$

(A) $P\left(\frac{x_1^c}{x}\right) = \frac{P(x_1^c \cap x)}{P(x)}$

$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$

(B) P(ठीक दो घटनाएँ / x) = $\frac{P(\text{ठीक दो घटनाएँ} \cap x)}{P(x)}$

$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$

$= \frac{7}{8}$

(C) $P(x / x_2) = \dfrac{P(x \cap x_2)}{P(x_2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{5}{8}$

(D) $P(x / x_1) = \dfrac{P(x \cap x_1)}{P(x_1)}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{7}{16}$

53. मानाकि $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ इस प्रकार है कि $2\cos\theta(1 - \sin\phi) = \sin^2\theta\left(\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\phi - 1$, $\tan(2\pi - \theta) > 0$ और $-1 < \sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. तब ϕ निम्न में से किसको संतुष्ट नहीं कर सकता ?

(A) $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \dfrac{4\pi}{3}$ (C) $\dfrac{4\pi}{3} < \phi < \dfrac{3\pi}{2}$ (D) $\dfrac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$

Sol. **Ans (ACD)**

चूंकि $\tan(2\pi - \theta) > 0, -1 < \sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \dfrac{3\pi}{2} < \theta < \dfrac{5\pi}{3}$

अब $2\cos\theta(1 - \sin\phi) = \sin^2\theta(\tan\theta/2 + \cot\theta/2)\cos\phi - 1$

$\Rightarrow 2\cos\theta(1 - \sin\phi) = 2\sin\theta\cos\phi - 1$

$\Rightarrow 2\cos\theta + 1 = 2\sin(\theta + \phi)$

चूंकि $\theta \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow 2\cos\theta + 1 \in (1, 2)$

$\Rightarrow 1 < 2\sin(\theta + \phi) < 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} < \sin(\theta + \phi) < 1$

चूंकि $\theta + \phi \in [0, 4\pi]$

$\Rightarrow \theta + \phi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ or $\theta + \phi \in \left(\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} - \theta < \phi < \frac{5\pi}{6} - \theta$ or $\frac{13\pi}{6} - \theta < \phi < \frac{17\pi}{6} - \theta$

$\Rightarrow \phi \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{-2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ $\left(\because \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$\therefore$ [सही विकल्प (A, C, D) है।]

54. यदि $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ और $x = 1$ द्वारा परिबद्ध (enclosed) क्षेत्र का क्षेत्रफल S है तो

(A) $S \geq \frac{1}{e}$ (B) $S \geq 1 - \frac{1}{e}$ (C) $S \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ (D) $S \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Sol. **Ans (ABD)**

$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

$-x^2 \leq 0$

$e^{-x^2} \leq 1$

$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$

$x^2 \leq x \Rightarrow -x^2 \geq -x \Rightarrow e^{-x^2} \geq e^{-x}$

$\Rightarrow I \geq \int_0^1 e^{-x} dx$

$\geq -\left(e^{-x}\right)_0^1$

$\geq -\left(\frac{1}{e} - 1\right)$

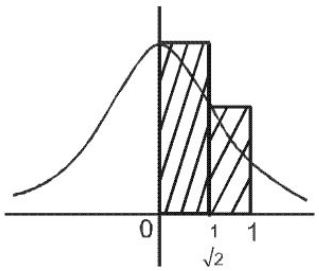
$I \geq 1 - \frac{1}{e}$ $\Rightarrow$ विकल्प (B) सही है

चूंकि $I \geq 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow I > \frac{1}{e} \Rightarrow$ विकल्प (A) सही है

$I < \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{e}} \times (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

अतः विकल्प (D) सही है

[अतः विकल्पA, B तथा D सही है]



55. अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, पर सरल रेखा $2x - y = 1$ के समान्तर स्पर्श रेखाये खींची गयी है। इन स्पर्श रेखाओं के अतिपरवलय पर स्पर्श बिन्दु (points of contacts) निम्न है

(A) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (B) $\left(-\frac{9}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (C) $\left(3\sqrt{3}, -2\sqrt{2}\right)$ (D) $\left(-3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$

Sol. **Ans (AB)**

स्पर्शरेखा की प्रवणता = 2

स्पर्शरेखा की समीकरण $y = 2x \pm \sqrt{9.4 - 4}$

$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{32}$

$\Rightarrow 2x - y \pm 4\sqrt{2} = 0$ ....(i)

माना स्पर्श बिन्दु (x_1, y_1) है

तो समीकरण (i), समीकरण $\frac{xx_1}{9} - \frac{yy_1}{4} - 1 = 0$ के सर्वसम होगी

$\therefore \frac{x_1/9}{2} = \frac{y_1/4}{1} = \frac{-1}{\pm 4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (x_1, y_1) \equiv \left(-\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ and $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

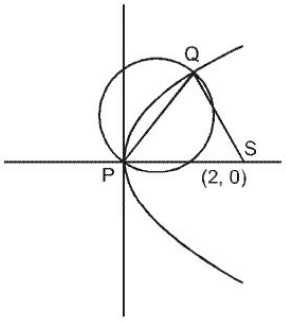
खण्ड - III : पूर्णांक उत्तर प्रकार

इस खण्ड में 5 प्रश्न है। इर प्रश्न का उत्तर **एक अंक का पूर्णांक**, 0 से 9 (दोनों सहित), तक है।

56. परवलय (parabola) $y^2 = 8x$ की नाभि (focus) S है और PQ इस परवलय और वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ की उभयनिष्ठ जीवा (common chord) है। त्रिभुज PQS का क्षेत्रफल है।

Sol. **Ans (4)**

नाभि $S \equiv (2, 0)$. बिन्दु $P \equiv (0, 0)$ और $Q = (2t^2, 4t)$



त्रिभुज PQS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2t^2 & 4t & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(8t) = 4t$ .....(i)

Q $(2t^2, 4t)$ वृत्त को सन्तुष्ट करता है

$4t^4 + 16t^2 - 4t^2 - 16t = 0$

$t^3 + 3t - 4 = 0$

$(t - 1)(t^2 + t + 4) = 0$

$t = 1$ रखने पर PQS का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ PQS का क्षेत्रफल 4 है।

57. माना कि $p(x)$ न्यूनतम घात का वह वास्तविक बहुपद (real polynomial) है जिसका एक स्थानीय उच्चतम (local maximum) $x = 1$ पर है और एक स्थानीय न्यूनतम (local minimum) $x = 3$ पर है। यदि $p(1) = 6$ और $p(3) = 2$ है तब $p'(0)$ का मान है

Sol. **Ans (9)**

$p' = \lambda(x - 1)(x - 3) = \lambda(x^2 - 4x + 3)$

$p(x) = \lambda(x^3/3 - 2x^2 + 3x) + \mu$

$p(1) = 6$

$6 = \lambda(1/3 - 2 + 3) + \mu$

$6 = \lambda(1/3 + 1) + \mu$

$18 = 4\lambda + 3\mu$ ...(i)

$p(3) = 2$

$2 = \lambda(27/3 - 2 \times 9 + 9) + \mu$

$2 = \mu$

$\mu = 2 \Rightarrow \lambda = 3$

$p'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$

$p'(0) = 3(-1)(-3)$

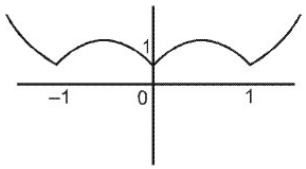
$= 9$

58. माना कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ जिसको $f(x) = |x| + |x^2 - 1|$ से परिभाषित किया गया है। जहाँ f का एक स्थानीय उच्चतम (local maximum) या एक स्थानीय न्यूनतम (local minimum) है, उन सभी बिंदुओं की कुल संख्या है।

Sol. **Ans (5)**

$f(x) = |x| + |x^2 - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} -x + x^2 - 1 & x < -1 \\ -x - x^2 + 1 & -1 \le x \le 0 \\ x - x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ x + x^2 - 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < -1 \\ -x^2 - x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ -x^2 + x + 1 & 0 < x < 1 \\ x^2 + x - 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

59. पद $6 + \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}}....}}\right)$ का मान है।

Sol. **Ans (4)**

माना $\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}}}..... = t$

$$\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}t} = t$$

$$4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}t = t^2 \Rightarrow$$

$$t^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}t - 4 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}t^2 + t - 12\sqrt{2} = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 3\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}}}{2 \times 3\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 17}{2 \times 3\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{16}{6\sqrt{2}}, \frac{-18}{6\sqrt{2}}$$

$t = \frac{8}{3\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}$ और $\frac{-3}{\sqrt{2}}$ निरस्त होगा

अतः $6 + \log_{3/2}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{8}{3\sqrt{2}}\right) = 6 + \log_{3/2}\left(\frac{4}{9}\right)$

$= 6 + \log_{3/2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$

$= 6 - 2 = 4$

60. यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ इकाई सदिश (unit vectors) हैं जो

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 9$,

को संतुष्ट करते हैं तब $|2\vec{a} + 5\vec{b} + 5\vec{c}|$ का मान है।

Sol. **Ans (3)**

$6 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a} = 9$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}\right) = \frac{-3}{2}$

$\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2 \geq 0$

$3 + 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}\right) \geq 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} \geq \frac{-3}{2}$

चूंकि $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \left|2\vec{a} + 5(-\vec{a})\right| = |3\vec{a}| \Rightarrow 3$

IIT-JEE -2012 : PAPER-1

CODE-0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9

IIT-JEE 2012 : ANSWER KEY : PAPER-1

Q. No.	PAPER CODE →									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	C	B	A	D	C	C	D	D	A	B
2	D	C	A	D	D	B	A	C	C	B
3	D	D	C	C	A	B	A	D	B	C
4	C	A	D	B	C	D	C	A	B	D
5	B	A	D	C	B	C	D	C	D	A
6	C	D	B	D	A	C	D	B	C	A
7	D	C	C	B	D	A	B	A	C	D
8	B	D	C	A	B	D	C	D	A	C
9	A	C	B	A	C	D	C	B	D	D
10	A	B	D	C	D	A	B	C	D	C
11	ABCD	ACD	AC	ABCD	BD	CD	AC	BD	CD	ACD
12	BD	ABCD	CD	BD	AC	ACD	CD	AC	ACD	ABCD
13	CD	AC	ABCD	CD	ACD	BD	ABCD	ACD	BD	AC
14	ACD	CD	BD	ACD	ABCD	AC	BD	ABCD	AC	CD
15	AC	BD	ACD	AC	CD	ABCD	ACD	CD	ABCD	BD
16	5	6	3	5	7	7	3	7	7	6
17	7	5	7	7	3	6	7	3	6	5
18	7	3	5	7	6	7	5	6	7	3
19	6	7	7	6	5	3	7	5	3	7
20	3	7	6	3	7	5	6	7	5	7
21	C	B	C	A	B	D	C	A	B	D
22	A	C	B	A	C	D	C	B	D	B
23	A	A	D	B	C	B	B	C	D	C
24	B	B	A	D	C	C	D	C	B	A
25	D	C	A	D	B	B	A	C	C	B
26	D	A	D	C	B	C	A	B	B	C
27	C	D	B	B	A	C	D	B	C	A
28	B	C	C	B	D	A	B	A	C	D
29	B	B	B	C	D	A	C	D	A	C
30	C	D	C	C	A	B	B	D	A	B
31	AD	BD	B	AD	AC	ACD	B	AC	ACD	BD
32	AC	AD	ACD	AC	B	BD	ACD	B	BD	AD
33	ACD	B	AD	ACD	BD	AC	AD	BD	AC	B
34	BD	ACD	AC	BD	AD	B	AC	AD	B	ACD
35	B	AC	BD	B	ACD	AD	BD	ACD	AD	AC
36	8	4	8	8	9	8	8	9	8	4
37	9	8	8	9	8	4	8	8	4	8
38	8	8	8	8	4	9	8	4	9	8
39	4	8	9	4	8	8	9	8	8	8
40	8	9	4	8	8	8	4	8	8	9
41	B	B	D	B	A	D	C	C	B	A
42	B	B	B	C	C	A	D	A	D	B
43	C	B	D	A	D	B	B	C	A	B
44	A	B	C	A	B	C	D	D	B	B
45	A	D	B	D	B	A	C	B	C	B
46	D	C	A	C	B	B	B	B	A	D
47	C	D	A	B	B	D	A	B	B	C
48	B	C	B	B	A	C	A	B	D	D
49	B	A	B	D	D	B	B	A	C	C
50	D	A	C	B	C	B	B	D	B	A
51	ABD	ACD	BD	ABD	AD	AB	BD	AD	AB	ACD
52	AD	ABD	AB	AD	BD	ACD	AB	BD	ACD	ABD
53	AB	BD	ABD	AB	ACD	AD	ABD	ACD	AD	BD
54	ACD	AB	AD	ACD	ABD	BD	AD	ABD	BD	AB
55	BD	AD	ACD	BD	AB	ABD	ACD	AB	ABD	AD
56	4	5	9	4	4	3	9	4	3	5
57	4	4	3	4	9	5	3	9	5	4
58	3	9	4	3	5	4	4	5	4	9
59	5	3	4	5	4	9	4	4	9	3
60	9	4	5	9	3	4	5	3	4	4